

Четвёртый тур 30.12.2025. Вторая лига. Бои за 1–6 места.

1. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для любого натурального n число $\underbrace{P(P(\dots(P(0))\dots))}_{n+1 \text{ итерация}} - 1$ делится на n .

2. Илья нарисовал на плоскости три окружности ω_1 , ω_2 и ω_3 с центрами O_1 , O_2 и O_3 соответственно. Оказалось, что они попарно касаются внешним образом и касаются внутренним образом окружности ω , центр которой O лежит на прямой O_1O_3 . Докажите, что $\angle O_1O_2O_3 < 90^\circ$.

3. Натуральные числа a и b таковы, что число ab свободно от квадратов. Назовем целое число n *удовлетворительным*, если его можно представить в виде $x^2 + y^2 - az^2 - bt^2$ для некоторых целых x , y , z и t таких, что $x^2 + y^2 > 0$. Известно, что число 0 удовлетворительное. Докажите, что тогда хотя бы половина из чисел $1, 2, \dots, 1000$ являются удовлетворительными.

4. Докажите, что граф, содержащий в качестве подграфа копию каждого возможного дерева на n вершинах, имеет не менее $\frac{1}{4}n(\ln n - 8)$ ребер.

5. На плоскости расположены несколько красных и несколько синих многоугольников. Оказалось, что любые два многоугольника одного цвета имеют общую точку. Верно ли, что всегда существует прямая, пересекающая все многоугольники?

6. Дан треугольник ABC и зафиксирован шаблон — треугольник $A'B'C'$ не подобный треугольнику ABC . Точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ выбираются так, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$. Докажите, что ГМТ ортоцентров этих треугольников — две параллельные прямые.

7. Пусть $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Для произвольных подмножеств X_1, X_2, \dots, X_n множества S и перестановки σ элементов S назовем σ -шафлом множество

$$H_\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) = \{i \in S \mid i \notin X_{\sigma(i)}\}.$$

Для некоторых попарно различных подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_n \subset S$ нашли их всевозможные σ -шафлы. Какое наибольшее количество попарно различных множеств могло получиться?

8. Докажите, что для любого натурального n найдутся n последовательных натуральных чисел, среди которых ровно $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ свободны от квадратов.

9. Назовём разбиение доски 49×49 на фигурки 1×2 и 1×3 *странным*, если фигурки нельзя пронумеровать числами от 1 до m (m — это число фигурок в конкретном разбиении) так, что любая фигурка, кроме первой в этой нумерации, хотя бы одной своей короткой стороной прилегает к фигурке с меньшим номером. Докажите, что число странных разбиений делится на 49.

10. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с комплексными коэффициентами получаются друг из друга перестановкой коэффициентов. Докажите, что существует комплексное число $z \neq 1$ такое, что $|z| = 1$ и $|P(z)| = |Q(z)|$.

Четвёртый тур 30.12.2025. 2 лига. Бои за 7–8 места. Третья лига.

1. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для любого натурального n число $\underbrace{P(P(\dots(P(0))\dots))}_{n+1 \text{ итерация}} - 1$ делится на n .

2. Илья нарисовал на плоскости три окружности ω_1 , ω_2 и ω_3 с центрами O_1 , O_2 и O_3 соответственно. Оказалось, что они попарно касаются внешним образом и касаются внутренним образом окружности ω , центр которой O лежит на прямой O_1O_3 . Докажите, что $\angle O_1O_2O_3 < 90^\circ$.

3. Все натуральные делители натурального числа n разбили на две группы по k делителей в каждой. Оказалось, что произведение сумм чисел в группах равно nk^2 . Чему может быть равно k ?

4. В связном графе n вершин и не менее n ребер. Докажите, что его вершины можно раскрасить в два цвета (в каждый цвет хотя бы одну вершину, каждую вершину в один цвет) так, чтобы разноцветных ребер было четное число, а подграф на всех вершинах и одноцветных ребрах состоял ровно из двух компонент связности.

5. Вершины правильного 101-угольника раскрашены в два цвета так, что оба цвета присутствуют. Назовем равнобедренный треугольник с вершинами в отмеченных точках *кривым*, если вершины одной его боковой стороны покрашены в одинаковые цвета, а вершины другой его боковой стороны покрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество *кривых* треугольников может быть?

6. Пусть AD — высота остроугольного треугольника ABC . Точки B' и C' выбраны на сторонах AB и AC соответственно так, что $BD = B'D$ и $CD = C'D$. Окружность ω_b касается прямой BD в точке B и проходит через точку B' . Окружность ω_c касается прямой CD в точке C и проходит через точку C' . Точки $X \in \omega_b$ и $Y \in \omega_c$ выбраны так, что $\angle BXD = \angle CYD = 180^\circ - \angle BAC$. Докажите, что B , C , X и Y лежат на одной окружности.

7. Пусть $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Для произвольных подмножеств X_1, X_2, \dots, X_n множества S и перестановки σ элементов S назовем σ -шафлом множество

$$H_\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) = \{i \in S \mid i \notin X_{\sigma(i)}\}.$$

Для некоторых попарно различных подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_n \subset S$ нашли их всевозможные σ -шафлы. Какое наибольшее количество попарно различных множеств могло получиться?

8. Докажите, что для любого натурального n найдутся n последовательных натуральных чисел, среди которых ровно $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ свободны от квадратов.

9. Назовём разбиение доски 49×49 на фигурки 1×2 и 1×3 *странным*, если фигурки нельзя пронумеровать числами от 1 до m (m — это число фигурок в конкретном разбиении) так, что любая фигурка, кроме первой в этой нумерации, хотя бы одной своей короткой стороной прилегает к фигурке с меньшим номером. Докажите, что число странных разбиений делится на 49.

10. Все четыре корня приведенного многочлена $P(x)$ четвертой степени с вещественными коэффициентами лежат в промежутке $[0, 2]$. Известно, что $P(0) = 1$. Найдите наибольшее возможное значение $P(1)$.